Lösungen Boolsche Algebra

Montag, 24. April 2023

1. Die Boolsche Algebra ist eine mathematische Struktur, welche lediglich auf der "Zahlenmenge" {0,1} beruht. Auf dieser Menge sind dann zwei zweistellige Operationen (ODER, UND) und eine einstellige Operation definiert (Negation). Dabei werden übliche Rechengesetze als Axiome verlangt (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz etc.).
   Eine Logische Funktion eine Funktion, welche als Eingangs- und Ausgangswerte boolsche Variablen hat.

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B} \qquad \mathbb{B} = \{0,1\}$$

$$f(x_1, x_2, .. x_n) = y \qquad x_i, y \in \mathbb{B}$$

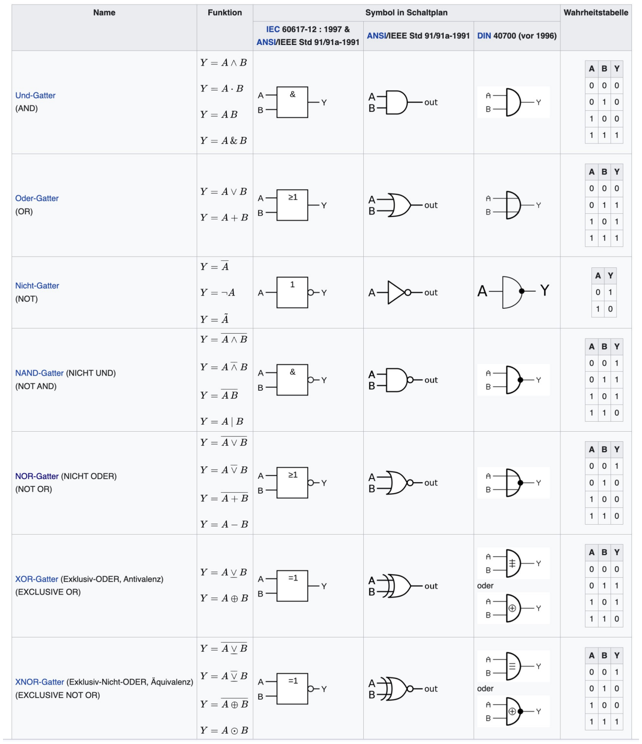
z.B. $f(0,1) = 1$; $f(0,0) = 0$; $f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 1$ (OR)

f	0	1
0	0	1
1	1	1

} Wahrheitstabelle

2. Eine Logische Funktion kann dargestellt werden durch
   a. Einen logische Ausdruck
   b. Ein Gatter (Bildliche Darstellung),
   c. Eine Wahrheitstabelle
   d. (Ein Zeitdiagramm)

3.

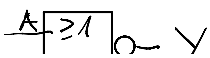


Name	Funktion	Symbol in Schaltplan: IEC 60617-12 : 1997 & ANSI/IEEE Std 91/91a-1991	ANSI/IEEE Std 91/91a-1991	DIN 40700 (vor 1996)	Wahrheitstabelle
Und-Gatter (AND)	$Y = A \wedge B$ $Y = A \cdot B$ $Y = AB$ $Y = A \& B$	&	out		A B Y: 0 0 0; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 1
Oder-Gatter (OR)	$Y = A \vee B$ $Y = A + B$	≥1	out		A B Y: 0 0 0; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1
Nicht-Gatter (NOT)	$Y = \overline{A}$ $Y = \neg A$ $Y = \tilde{A}$	1	out		A Y: 0 1; 1 0
NAND-Gatter (NICHT UND) (NOT AND)	$Y = \overline{A \wedge B}$ $Y = A \bar{\wedge} B$ $Y = \overline{AB}$ $Y = A \mid B$	&	out		A B Y: 0 0 1; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 0
NOR-Gatter (NICHT ODER) (NOT OR)	$Y = \overline{A \vee B}$ $Y = A \bar{\vee} B$ $Y = \overline{A + B}$ $Y = A - B$	≥1	out		A B Y: 0 0 1; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 0
XOR-Gatter (Exklusiv-ODER, Antivalenz) (EXCLUSIVE OR)	$Y = A \underline{\vee} B$ $Y = A \oplus B$	=1	out	oder	A B Y: 0 0 0; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 0
XNOR-Gatter (Exklusiv-Nicht-ODER, Äquivalenz) (EXCLUSIVE NOT OR)	$Y = \overline{A \underline{\vee} B}$ $Y = A \bar{\underline{\vee}} B$ $Y = \overline{A \oplus B}$ $Y = A \odot B$	=1	out	oder	A B Y: 0 0 1; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 1

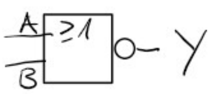
4. NOR

B

a) Formel $\neg(A \vee B)$

b) 

b)



c)

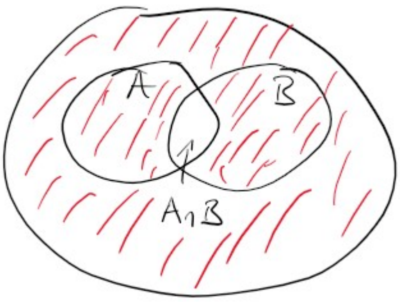
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

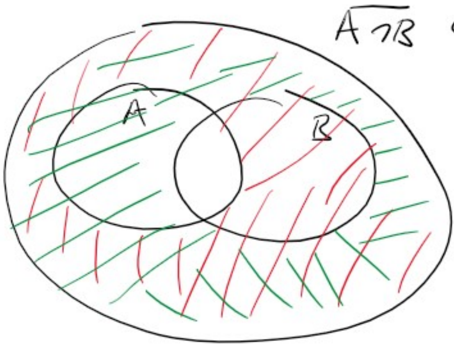
oder

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	1

5. Die De Morganschen Gesetze:
a) Nicht (A und B) ist dasselbe wie (Nicht A) oder (Nicht B)

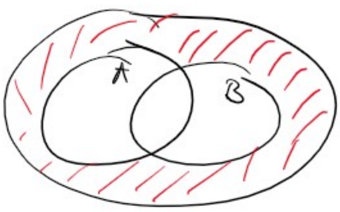
$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$$

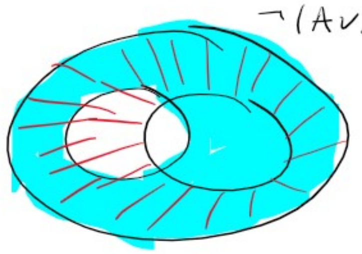




b) Nicht (A oder B) ist dasselbe wie (Nicht A) und (Nicht B)

$$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$





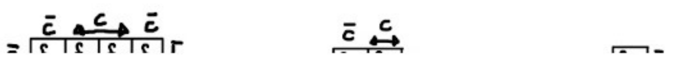
6. Die Disjunktive Normalform ist eine bestimmte Darstellungsart von Logischen Funktionen. Sie besteht aus lauter Disjunktionen (ODER-Verknüpfungen) von Konjunktionen (UND-Verknüpfungen).
Die Konjunktionen können auch einfach Variablen sein.

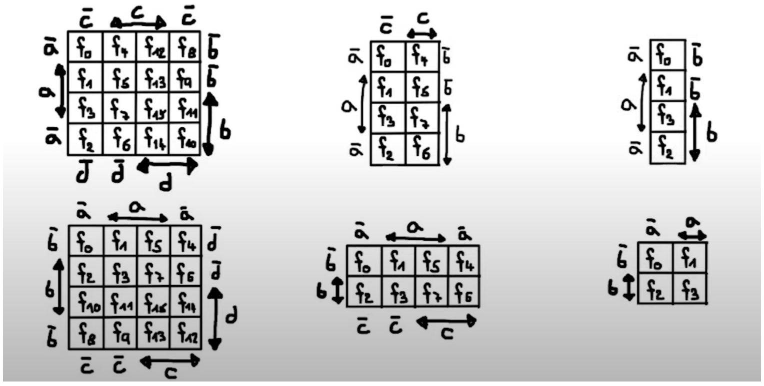
7. Die Konjunktive Normalform ist eine Darstellung von Logischen Funktionen als logischer Ausdruck. Sie besteht aus lauter Konjunktionen (UND-Verknüpfungen) von Disjunktionen (ODER-Verknüpfungen).
Die Disjunktionen können auch nur aus einer Variablen bestehen.

8. Logische Nachbarn:
Steht zwischen zwei logischen UND-Ausdrücken ein ODER (wie in der Disjunktiven Normalform) und unterscheiden sich die beiden Ausdrücke nur durch eine Variable, die einmal negiert ist und einmal nicht, so kann diese Variable eliminiert werden.
Z.B.:

$$(A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \Leftrightarrow A \wedge C$$

9. Das KV-Diagramm (Karnaugh-Veitch-Diagramm) ist eine "Eselsbrücke" bzw. ein Schema als Hilfsmittel zur Bestimmung der logischen Nachbarn. Logische Nachbarn sind im KV-Diagramm nebeneinander.





[KV-Diagramm - einfach erklärt!]

10.

a	b	c	d	y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1.
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$\left.\begin{array}{l}(\bar{a}\wedge\bar{b}\wedge\bar{c}\wedge\bar{d})\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c\wedge d)\vee\\(\bar{a}\wedge b\wedge c\wedge\bar{d})\vee(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c}\wedge d)\vee\\(a\wedge b\wedge\bar{c}\wedge\bar{d})\vee(a\wedge b\wedge c\wedge d)\end{array}\right\}\text{Disjunkt. Normalform}$$

	$\bar{c}$	c	c	$\bar{c}$	
$\bar{a}$	1	0	1	0	$\bar{b}$
a	0	0	0	1	$\bar{b}$
a	1	0	1	0	b
$\bar{a}$	0	1	0	0	b
	$\bar{d}$	$\bar{d}$	d	d	

Oops!